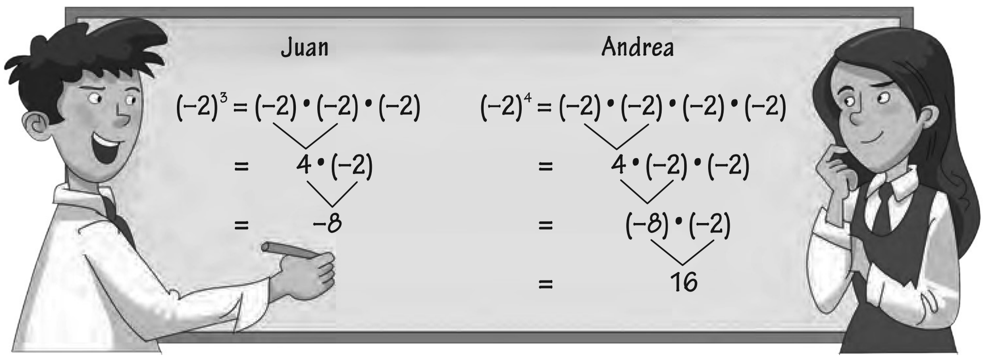
Potencias de base y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base y exponente son números enteros.
- Comprender el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

Juan y Andrea resuelven ejercicios de potencias.



Su profesor lo revisa y les dice que ambos cálculos están correctos:

- Comprueba los cálculos usando la **calculadora**.
- ¿Qué relación observas entre cada potencia y su resultado? Explica.

____

____

Actitud

Cuando trabajes en equipo, recuerda respetar y valorar las opiniones de los demás.

Completa la siguiente tabla y luego responde.

Potencia	Multiplicación iterada	Resultado	¿Exponente par o impar?	Signo del resultado
$(-2)^5$				
$(-2)^6$				
$(-3)^4$				
$(-3)^5$				
$(-1)^7$				
$(-1)^8$				

- ¿Qué signo tiene el resultado de una potencia cuya base es un número negativo? ¿Depende del exponente? Comenta con un compañero o una compañera.

____

____

Habilidad

Cuando elaboras esquemas o tablas para dar respuesta a distintas situaciones estás desarrollando la habilidad de **representar**.

Al igual que las potencias que tienen como base un número natural, las potencias que tienen como base un número entero negativo y exponente natural se pueden considerar como una multiplicación iterada.

Conceptos

- Una **potencia** cuya base es un **número entero negativo** dará como resultado un número positivo si el exponente es par, y dará como resultado un número negativo si el exponente es impar.
- Al representar simbólicamente esta relación, se tiene que: Si $a \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:
  - Si n es par, entonces $a^n > 0$.
  - Si n es impar, entonces $a^n < 0$.

Ejemplo 1

¿El resultado de -5^4 es igual que el de $(-5)^4$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1 Calculas por separado ambas potencias.

$$\begin{aligned} -5^4 = -(5^4) &= -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= -(25 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= -(125 \cdot 5) \\ &= -625 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5)^4 &= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \\ &= 25 \cdot (-5) \cdot (-5) \\ &= -125 \cdot (-5) \\ &= 625 \end{aligned}$$

2 En el desarrollo de la potencia del lado izquierdo se observa que el signo de la potencia en todo el desarrollo es negativo.

3 En el lado derecho se observa que el signo de la potencia influye en cada una de las multiplicaciones.

Respuesta: El resultado de -5^4 es distinto al de $(-5)^4$.

Atención

Recuerda la **regla de los signos para la multiplicación** de números enteros.

$+ \cdot + = +$ $\quad + \cdot - = -$

$- \cdot - = +$ $\quad - \cdot + = -$

Conceptos

Cuando el **exponente de una potencia es 0**, su resultado es 1 siempre que la base de la potencia no sea 0.

Simbólicamente: Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.

Atención

$\mathbb{Z} - \{0\}$ significa que se considera el conjunto de los números enteros pero menos el cero.

Ejemplo 2

Verifica con un ejemplo que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

Se utilizará $a = 3$, entonces se tiene que la división $3 : 3 = 1$, que se escribe como $3^1 : 3^1$ usando potencias.

Luego al aplicar la regla de la división de potencias de igual base se tiene:

$$1 = 3^1 : 3^1 = 3^{1-1} = 3^0$$

Por lo tanto $3^0 = 1$, es decir, se verifica la propiedad.

En vez de usar la base 3 si se utiliza una base negativa o cualquier otra base distinta de cero, ¿cómo desarrollarías el ejemplo? Comenta con un compañero o una compañera.

Hasta ahora has calculado potencias con exponente positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es un número negativo? Por ejemplo, calculemos el valor de 2^{-3}.

Observa lo siguiente:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Entonces, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- ¿Se utilizó alguna propiedad de potencia? Explica.

____

____

Conceptos

Si el **exponente de una potencia de base natural** es un número entero negativo, su valor será igual al del inverso multiplicativo de la potencia cuyo exponente es positivo.

Simbólicamente: Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Esta propiedad también se cumple si la base de la potencia es un número entero distinto de cero.

Ejemplo 3

Calcula el cociente entre 3^7 y 3^9 y escríbelo como potencia.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Escribes el valor de cada potencia.

   Valor de 3^7.

   $3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2\,187$

   Valor de 3^9.

   $3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 19\,683.$

2. Calculas el cociente empleando la regla de la división de potencias de igual base y usando sus valores.

   Usando potencias

   $2\,187 : 19\,683 = 3^7 : 3^9$
   $= 3^{7-9} = 3^{-2}$

   Usando valores

   $2\,187 : 19\,683 = \frac{2\,187}{19\,683} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

3. Igualas los dos resultados y obtienes que $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

   Por lo tanto, $3^7 : 3^9 = 2\,187 : 19\,683 = 3^{-2}$.

- ¿Es correcto afirmar que siempre se cumple que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la importancia del conjunto numérico al que pertenecen a y n?

Ejemplo 4

Calcula el valor de $(-2)^{-4}$ y de $(-3)^{-3}$.

- $(-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \dfrac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \dfrac{1}{4\cdot 4} = \dfrac{1}{16}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= \dfrac{1}{2^4}$ → Escribes el denominador como potencia.

- $(-3)^{-3} = \dfrac{1}{(-3)^3}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \dfrac{1}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \dfrac{1}{9\cdot(-3)} = \dfrac{1}{-27}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= -\dfrac{1}{27}$

  $= -\dfrac{1}{3^3}$ → Escribes el denominador como una potencia.

Por lo tanto, $(-2)^{-4} = \dfrac{1}{2^4}$ y $(-3)^{-3} = -\dfrac{1}{3^3}$.

¿Cómo se puede expresar una fracción cuyo denominador es una potencia de exponente negativo? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejemplo 5

Usa las propiedades de las potencias de base entera para simplificar la expresión algebraica y escribirla como potencia. Considera que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\frac{a^2\cdot b^2\cdot b^3\cdot c^4}{c\cdot a^2\cdot b^5\cdot c^3}$$

Para simplificar la expresión, puedes seguir estos pasos:

$\dfrac{a^2\cdot b^{2+3}\cdot c^4}{a^2\cdot b^5\cdot c^{1+3}} = \dfrac{a^2\cdot b^5\cdot c^4}{a^2\cdot b^5\cdot c^4}$ → Aplicas la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

$= \dfrac{a^2}{a^2}\cdot\dfrac{b^5}{b^5}\cdot\dfrac{c^4}{c^4}$ → Escribes como producto de fracciones.

$= a^{2-2}\cdot b^{5-5}\cdot c^{4-4}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias.

$= a^0\cdot b^0\cdot c^0$ → Aplicas la propiedad de las potencias con exponente cero.

$= 1\cdot 1\cdot 1 = 1$

Atención

Cuando el exponente de una potencia no se anota, se asume que es 1, es decir, $a = a^1$.

¿Cómo explicarías usando argumentos matemáticos que el valor de una potencia de exponente 0 es 1? Explica con tus palabras.