Multiplicación y división de potencias de base racional

Objetivos

- Aplicar las propiedades de la multiplicación y la división de potencias.
- Resolver problemas de la vida diaria usando potencias de base racional.

Paula contrató los servicios de un jardinero para construir un jardín en un terreno con forma cuadrada que tiene 3,5 m de lado. El jardinero hizo un jardín que ocupaba $\frac{1}{10}$ de la mitad del terreno de Paula. Por el trabajo cobró $ 4 500 por metro cuadrado de jardín construído. ¿Cuánto gastó Paula? ¿Cuántos terrenos con forma cuadrada de 0,2 m de lado se pueden construir en el jardín?

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la primera pregunta.

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2 \cdot 4\,500$$

____

____

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 7^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500 \qquad \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500$$

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la segunda pregunta.

$$\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2\right) : (0{,}2)^2$$

____

____

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$$\left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3{,}5)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2 \qquad \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

- Resuelve y explica cada operación usando propiedades de las potencias de base entera y responde las preguntas del problema.

- En multiplicaciones y divisiones de potencias se pueden usar propiedades para simplificar su cálculo. Estas propiedades se emplean cuando la base o el exponente es el mismo.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual base racional** y con **exponente entero**, se conserva la base y se suman los exponentes.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^5$.

$\left(-\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^5 = \frac{(-9)^3}{4^3} \cdot \frac{(-9)^5}{4^5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{(-9)^3 \cdot (-9)^5}{4^3 \cdot 4^5}$ ⟶ Multiplicas fracciones.

$= \frac{(-9)^{3+5}}{4^{3+5}}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias.

$= \left(\frac{-9}{4}\right)^{3+5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Atención

Cada número racional se puede expresar como la división de dos números enteros, con el denominador distinto de cero; de esta manera, las propiedades propuestas para las potencias de base un número entero se relacionan con las propiedades de base un número racional.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual exponente** se conserva el exponente y se multiplican las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 2

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$.

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ ⟶ Escribes las potencias como multiplicación iterada.

$= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}$ ⟶ Aplicas la conmutatividad para reordenar los factores.

$= \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) = \left(-\frac{6}{20}\right)^3$ ⟶ Multiplicas cada par de factores y representa como una potencia.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Las propiedades que has estudiado para la multiplicación de potencias se extienden para la división de potencias de igual base o de igual exponente.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual base racional** distinta de 0 y de **exponente entero** se conserva la base, y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 3

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5$.

$\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{(-5)^3}{2^3} : \frac{(-5)^5}{2^5}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{(-5)^3}{2^3} \cdot \frac{2^5}{(-5)^5}$ → Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$= \frac{(-5)^3 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (-5)^5}$ → Multiplicas fracciones.

$= \frac{(-5)^{3-5}}{2^{3-5}}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual base.

$= \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo tanto, $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$.

En este ejemplo se aplicaron propiedades de potencias de base entera. ¿Cómo se podría mostrar la propiedad solo usando la interpretación de potencias como multiplicación iterada? Explícale a un compañero o compañera.

Actitud

Recuerda tener una actitud respetuosa cuando trabajes con tus compañeros.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual exponente entero** se conserva el exponente y se dividen los números racionales de las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 4

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual exponente y base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3$.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{4^3}{7^3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{7^3}{4^3}$ → Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^3$ → Escribes el segundo factor como potencia de base racional.

$= \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3} : \frac{4}{7}\right)^3$ → Escribes el producto como cociente.

$= \left(-\frac{14}{12}\right)^3$ → Calculas la división de fracciones.

Por lo tanto, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{14}{12}\right)^3$.

Atención

Las propiedades de la multiplicación y división de potencias de igual exponente con base racional también son aplicables cuando la base es un número entero distinto de cero o un número natural.

Ejemplo 5

Aplica las propiedades de las potencias para simplificar la expresión.

$$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right]$$

PASO A PASO

1 En el primer paréntesis resuelves una división de potencias de igual base.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{7-10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

2 En el segundo paréntesis resuelves una división de potencias de igual exponente.

$$\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} : \frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} \cdot \frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{100}\right)^3$$

3 Resuelve la multiplicación.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)^3 = \left[\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)\right]^3 = \left[-\frac{20}{400}\right]^3 = \left[-\frac{1}{20}\right]^3 = -\frac{1}{8\,000}$$

Por lo tanto, $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right] = -\frac{1}{8\,000}$.

¿Crees que conocer las propiedades de las potencias te ayudará al calculo de su valor? Explica.