

Conjuntos

Aprenderé a: representar conjuntos numéricos por extensión y por comprensión.

Repaso

1. Menciona algunos de los elementos que forman el conjunto de los números naturales.

Laura le propone a Tomás que describa algunos conjuntos, sin mencionar cada una de las letras. Revisa lo siguiente.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B = \{c, e, i, h, l\}$$

$$C = \{b, c, d, f, g, l, m, n, p, r, s, t, v, w\}$$

- ¿Cómo crees tú que se pueden describir? Explica.

En cursos anteriores aprendiste que un conjunto es una colección de elementos que tienen una característica en común y que se puede definir escribiendo los elementos que lo conforman; por ejemplo, si queremos definir el conjunto A que le presentó Laura a Tomás, podemos escribir:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Otra manera de definir el conjunto anterior consiste en describir la característica común que tienen los elementos del conjunto. En este caso, como todas las letras son vocales, nos queda:

$$A = \{\text{letras que son vocales}\}$$

En el primer caso, el conjunto está definido por **extensión** y en el segundo, por **comprensión**.

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por extensión o por comprensión; por ejemplo, si queremos definir el conjunto D de todos los dígitos nos queda:

Por extensión: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Por comprensión: $D = \{\text{dígitos}\}$

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por comprensión, usando simbología matemática; por ejemplo, para definir el conjunto P de los números positivos pares, podemos escribir:

tal que

$$P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$$

Conjunto numérico al que pertenecen todos los elementos de P .

Característica común de todos los elementos de P .

El conjunto anterior se interpreta como "los elementos del conjunto P son todos los números pertenecientes a los números naturales tales que sean pares".

En la tabla de la derecha se muestran algunos símbolos matemáticos que se usan para definir conjuntos por comprensión; por ejemplo, el símbolo \wedge significa "y", y se usa para indicar que se deben cumplir ambas condiciones; por ejemplo, el conjunto $P = \{x \in \mathbb{Z} / x \text{ es par} \wedge x \text{ es de una cifra}\}$ representa el conjunto de aquellos números enteros que son pares y que además, tienen una cifra, es decir: $P = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Al representar conjuntos por comprensión debes fijarte en que todos los elementos que forman el conjunto cumplan las condiciones dadas y que no existan otros elementos que cumplan la condición y que no estén en el conjunto; por ejemplo, no es correcto describir el conjunto $A = \{2, 4, 6, 9\}$ por comprensión de la forma $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$, ya que hay números naturales que cumplen la condición de ser pares pero que no pertenecen a A . Además, un elemento del conjunto A (el 9) no cumple con la condición de ser par.

Símbolo	Se lee:
/ o bien :	Tal que
\in	Pertenece
\wedge	y
\vee	o
$=$	Igual que
\neq	Distinto que

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 36\}$.

Para escribir el conjunto por extensión, solo escribimos sus elementos separados por una coma. Los elementos de A son todos los números naturales que sean divisores de 36, es decir: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

¿Cómo hacerlo?

Escribe por comprensión el conjunto $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

Si te fijas, los elementos de A corresponden a los múltiplos positivos de 3. Luego: $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es múltiplo de } 3\}$

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión y por comprensión el conjunto H de todos los números positivos que sean divisores de 24, o bien, que sean divisores de 18.

Los divisores de 24 son: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Los divisores de 18 son: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Luego, del enunciado se desprende que los elementos del conjunto H son todos los divisores positivos de 24 o de 18. Si te fijas, puede darse cualquiera de las dos condiciones. Finalmente, definimos el conjunto H :

por extensión: $H = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$;

por comprensión: $H = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 24 \vee x \text{ es divisor de } 18\}$

Utilizamos el símbolo \vee para indicar que debe cumplirse una condición o la otra.

Tomo nota

- Un conjunto se puede definir:
 - por extensión, cuando los elementos del conjunto se escriben explícitamente; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales de dos cifras que comienzan con 3 es: $C = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}$;
 - por comprensión, cuando se describe una o más características comunes de todos los elementos que forman el conjunto; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales que son divisores de 24 y que son pares, se puede describir por comprensión como: $P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 24 \wedge x \text{ es par}\}$.

En cursos anteriores conociste algunas operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos, como la unión o la intersección de ellos; por ejemplo, dados los conjuntos $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$, la unión de P y Q es el conjunto con todos los elementos que pertenecen a P , o bien a Q , es decir:

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13\}$$

Por otra parte, la intersección de P y Q es el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen tanto a P como a Q , es decir:

$$P \cap Q = \{2, 3, 5\}$$

Para realizar operaciones con conjuntos definidos por comprensión, una estrategia consiste en escribirlos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. Por ejemplo, dados los conjuntos:

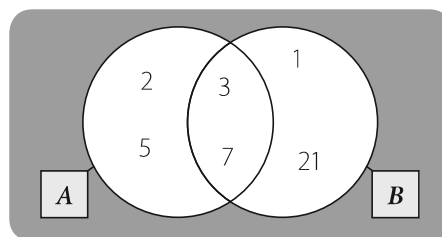
$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un número primo de una cifra}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es un divisor de } 21\}$$

Si queremos determinar los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$, a simple vista no resultará muy sencillo pues no conocemos los elementos de A ni de B , de modo que podemos escribir ambos conjuntos por extensión y luego representarlos en un diagrama de Venn. Observa.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

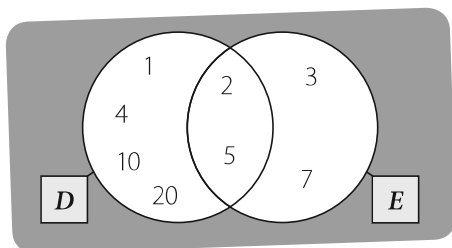
$$B = \{1, 3, 7, 21\}$$



Luego, se tiene que $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 21\}$ y $A \cap B = \{3, 7\}$.

¿Cómo hacerlo?

Sean D y E dos conjuntos. Si $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es divisor de } 20\}$, $D \cap E = \{2, 5\}$ y $D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20\}$, define el conjunto E por extensión y por comprensión.



Primero, necesitamos reconocer el conjunto D por extensión. Luego, nos queda: $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Luego, podemos representar la situación anterior usando un diagrama de Venn, como el de la izquierda.

Por lo tanto, $E = \{2, 3, 5, 7\}$. Para definir el conjunto E por comprensión, considera que todos los elementos de E son números primos de una cifra. Luego, podemos escribir: $E = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es primo } \wedge x \text{ tiene una cifra}\}$.

Invitado especial



Archivo editorial

John Venn (1834-1923)
Fue un matemático y lógico británico que desarrolló los diagramas que llevan su nombre, para representar las operaciones entre conjuntos.

Tomo nota

- Para realizar operaciones con conjuntos que están definidos por comprensión, en muchos casos es conveniente escribir estos conjuntos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. También es conveniente representar, en ocasiones, los conjuntos mediante diagramas de Venn.